

Las computadoras...¿son superhéroes?

Lic. Federico Pousa
Departamento de Computación
FCEyN-UBA



¿Qué es un Problema Combinatorio?

- Es un problema en que deben contarse una cierta cantidad de posibilidades, casos, configuraciones, conjuntos, etc.
- El resultado es un número entero.



Ejemplo de Problema Combinatorio

¿De cuántas formas diferentes pueden sentarse n alumnos en un aula de n asientos?

Respuesta:

Las podemos recorrer de

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

maneras distintas



10!
3.628.800



10!

3.628.800

20!

2.432.902.008.176.640.000



10!

3.628.800

20!

2.432.902.008.176.640.000

30!

265.252.859.812.191.058.636.308.480.000.000



10!

3.628.800

20!

2.432.902.008.176.640.000

30!

265.252.859.812.191.058.636.308.480.000.000

40!

815.915.283.247.897.734.345.611.269.596.115.894.272.000.000.000



3.628.800

2.432.902.008.176.640.000

265.252.859.812.191.058.636.308.480.000.000

815.915.283.247.897.734.345.611.269.596.115.894.272.000.000.000

933262154439441526816992388562667004907159682643816214685
92963895217599993229915608941463976156518286253697920
827223758251185210916864000000000000000000000000



¿De cuántas formas diferentes pueden cumplir años n personas, si queremos que todos cumplan un día diferente?

Si consideramos 365 días, entonces es
 $365 \times 364 \times 363 \times \dots (365 - n + 1)$



¿Y si pueden cumplir cualquier día?

Entonces es $365 \times 365 \times 365 \times \dots \times 365 = 365^n$

Si hacemos las cuentas, podemos ver
que con solo 23 personas hay más posibilidades de que
dos personas cumplan el mismo día que de que no
suceda



¿Qué es un Problema de Optimización Combinatoria?

- Es un problema en el cual, de un conjunto de objetos valuados con alguna función, se busca el objeto con “mejor” valor.
- Puede ser el objeto de máximo valor, de mínimo valor o alguna otra alternativa.





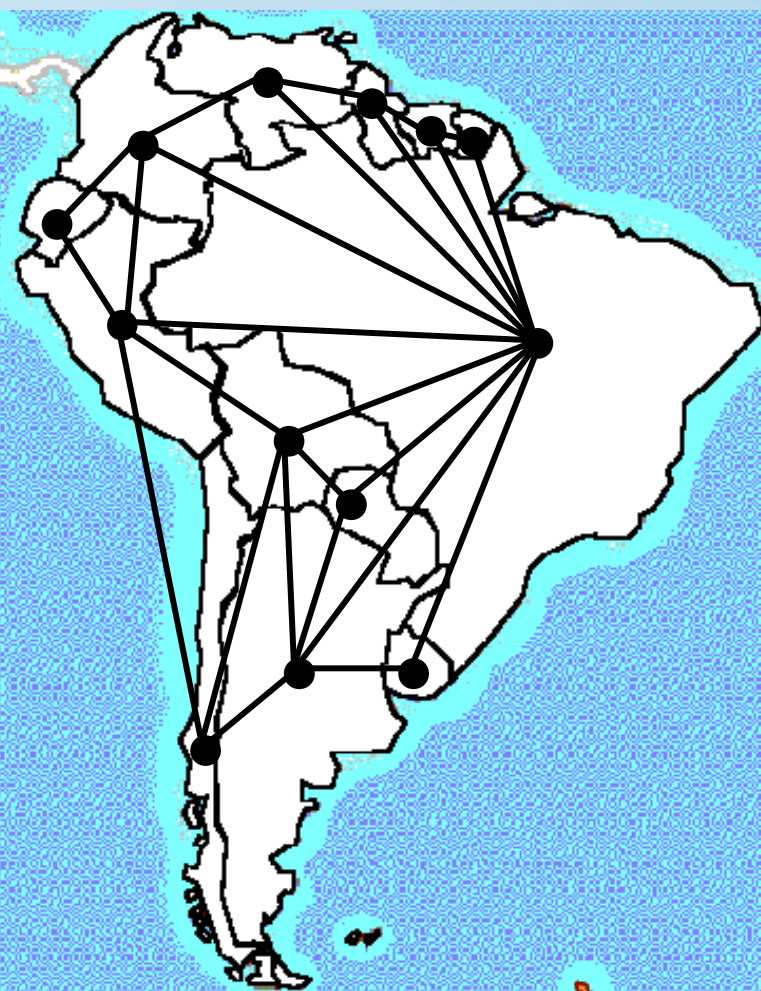
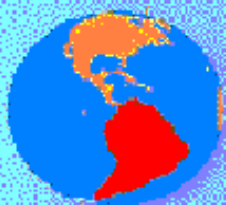
América del Sur

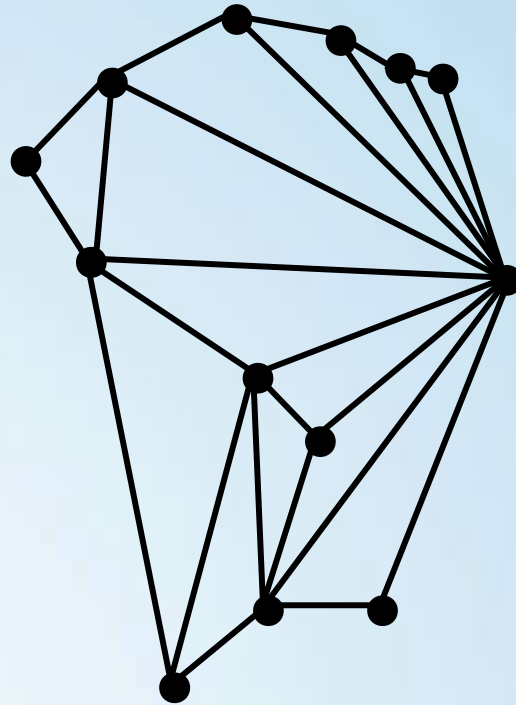


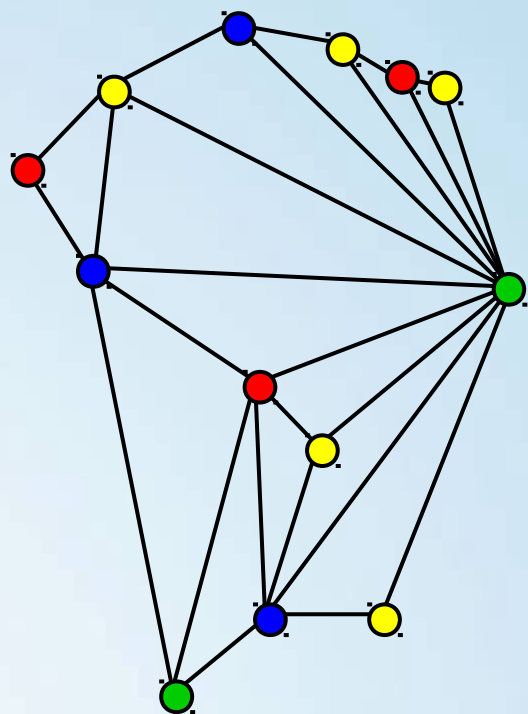


América del Sur











¿Qué pasa si quiero usar la mínima cantidad de colores?

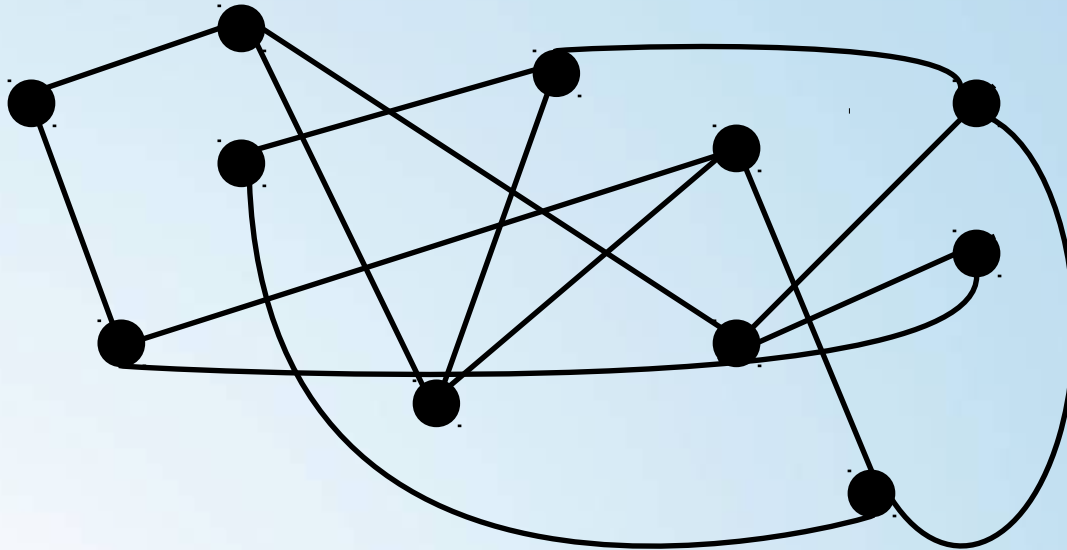
Alrededor de 1850, se conjeturó que 4 colores alcanzaban para pintar un mapa.

1890: 5 colores

1976: 4 colores



¿y en casos generales...?
Es un problema DIFÍCIL de resolver



Hay ejemplos de tamaño 250, 500 y 1000 para los que aún no se conoce la cantidad mínima necesaria.

¿Cómo atarse los cordones?

Hay 43200 maneras diferentes
(6 ojales de cada lado)





¿Cómo se Resuelve un Problema de Optimización Combinatoria?

Fuerza Bruta

Consiste en listar todos los casos y para cada uno calcular su costo, identificando de este modo el caso de costo más conveniente.

Hoy contamos con las computadoras, capaces de hacer millones de operaciones aritméticas y lógicas por segundo.

Podríamos pensar que como son muy eficientes y rápidas no tendremos problemas en resolver los problemas más grandes que se nos presenten.

¿Será cierto?



Problema del Viajante

Un viajante debe recorrer cierta cantidad de ciudades y volver finalmente a la ciudad donde vive.

¿Cuál es el mejor recorrido?

- ✓ El más corto.
- ✓ El más rápido.



Fuerza Bruta

Supongamos que quiero resolver el problema del viajante de comercio para 20 ciudades

¿Cuánto creen que tardaremos en evaluar todos los posibles recorridos?

¡Arriesguen!

1 minuto, 1 hora, 1 día, 1 año, 1 siglo o más?



Fuerza Bruta

Tenemos una computadora que realiza un billón de evaluaciones por segundo ($1.000.000.000.000 \times \text{seg}$)

Hay que evaluar

$20! = 2432902008176640000$ posibilidades



Fuerza Bruta

Tenemos una computadora que realiza un billón de evaluaciones por segundo ($1.000.000.000.000 \times \text{seg}$)

Hay que evaluar
 $20! = 2432902008176640000$ posibilidades
entonces tardaríamos...
2.432.902 seg
= 675 horas = 28 días



Fuerza Bruta

Tenemos una computadora que realiza un billón de evaluaciones por segundo ($1.000.000.000.000 \times \text{seg}$)

Hay que evaluar
30!

=265252859812191058636308480000000
posibilidades



Fuerza Bruta

Tenemos una computadora que realiza un billón de evaluaciones por segundo ($1.000.000.000.000 \times \text{seg}$)

Hay que evaluar
30!

=265252859812191058636308480000000
posibilidades

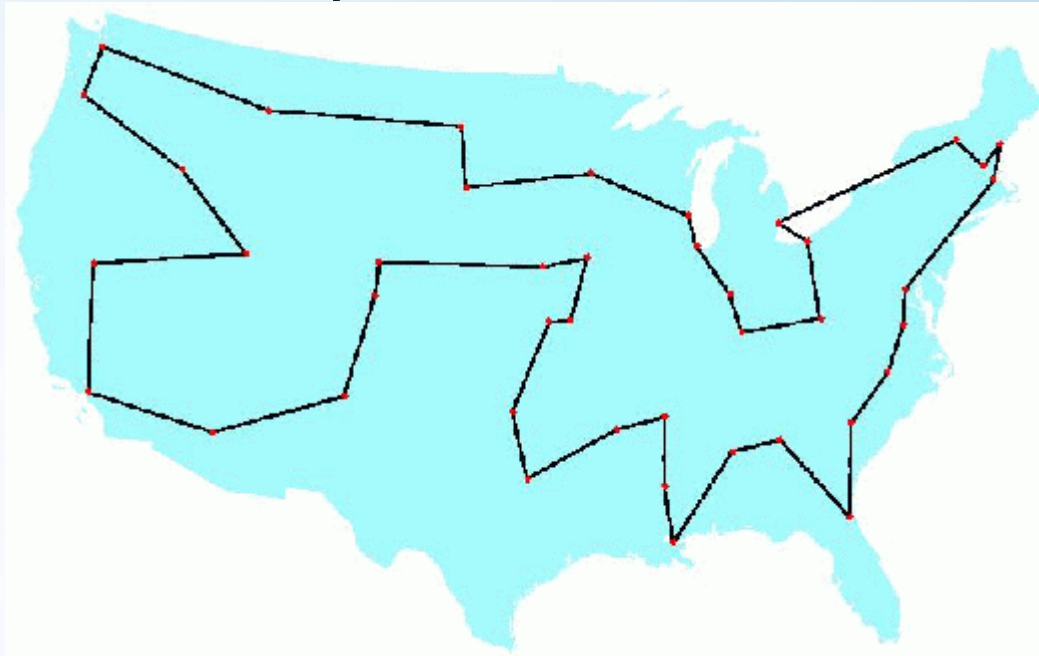
Eso resultaría en
8.411.113.007 siglos



Más Allá de la Fuerza Bruta

En 1954 Dantzig, Fulkerson y Johnson resolvieron un caso de 49 ciudades.

DF&J estaban seguros de que la solución era la mejor del conjunto de 49! soluciones posibles.



HELP! WE'RE LOST!

HELP "CAR 54"...AND WIN CASH
 54...\$1,000 PRIZES
 ONE...\$10,000 GRAND PRIZE

Help Teedy and Muldoon find the shortest round trip route to visit all 33 locations shown on the map. All you do is draw connecting straight lines from location to location to show the shortest round trip route.

HERE'S THE CORRECT START...
 Begin at Chicago, Illinois. From there, lines show correct route as far as Erie, Pennsylvania. Next, do you go to Carlisle, Pennsylvania or Wana, West Virginia? Check the easy instructions on back of this entry blank for details.

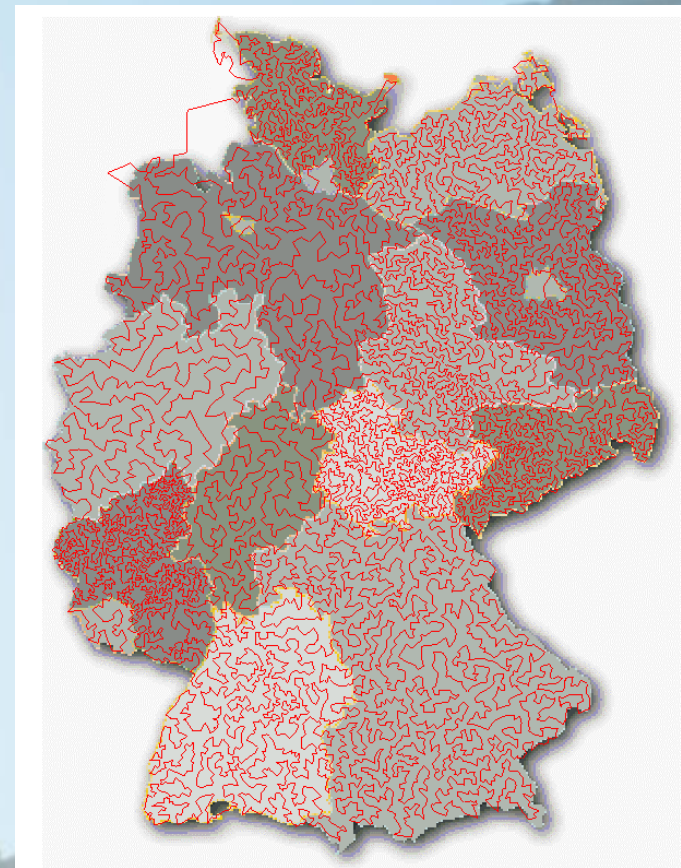
PROCTER & GAMBLE 1962

OFFICIAL RULES ON REVERSE SIDE

(33 ciudades -1962)

Solución Record de 15.112 Ciudades (2001)

- Resuelta en una red de 110 máquinas en las universidades de Rice y Princeton.
- Tiempo total de cómputo de 22.6 años de una Compaq EV6 Alpha de 500 MHz
- Longitud total de aproximadamente 66.000 Km (Un poco más de una vuelta y media a la tierra por el ecuador).

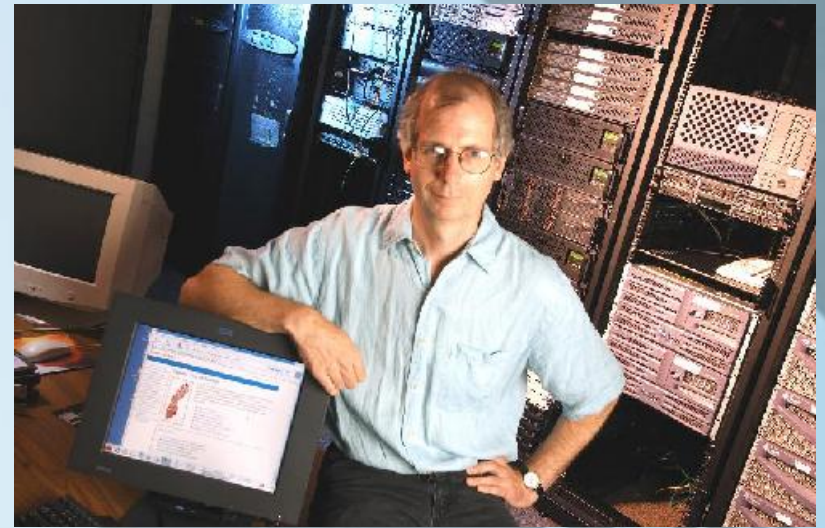
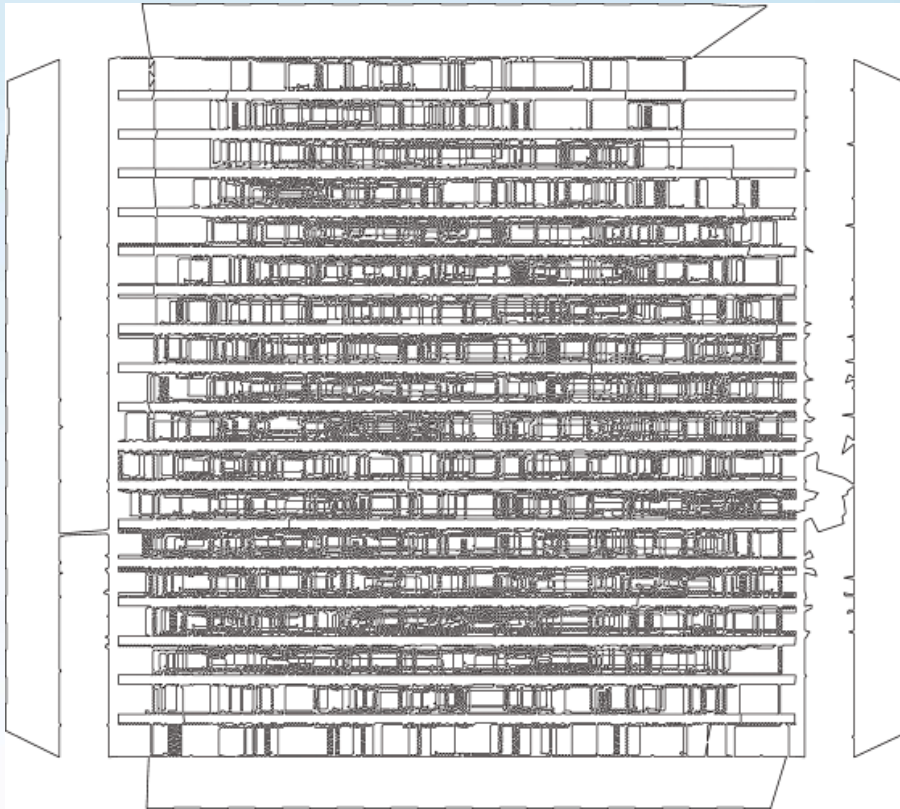




**Solución
record
24978
ciudades
2004**

91.9 CPU años
Intel Xeon 2.8
GHz

Solución record 85900 ciudades 2006



96 Nodos, 2.8 GHz y 2 GBytes.



Problema abierto: 1.904.711 ciudades



H. Nguyen, I. Yoshihara, K. Yamamori y M. Yasunaga
7.518.425.642 Junio 2003

7.517.285.610m	Septiembre 2003
7.515.971.188m	Mayo 2007
7.515.947.511m	Noviembre 2008
7.515.786.987m	Abril 2011
7.515.778.188m	Octubre 2011
7.515.772.212m	Mayo 2013

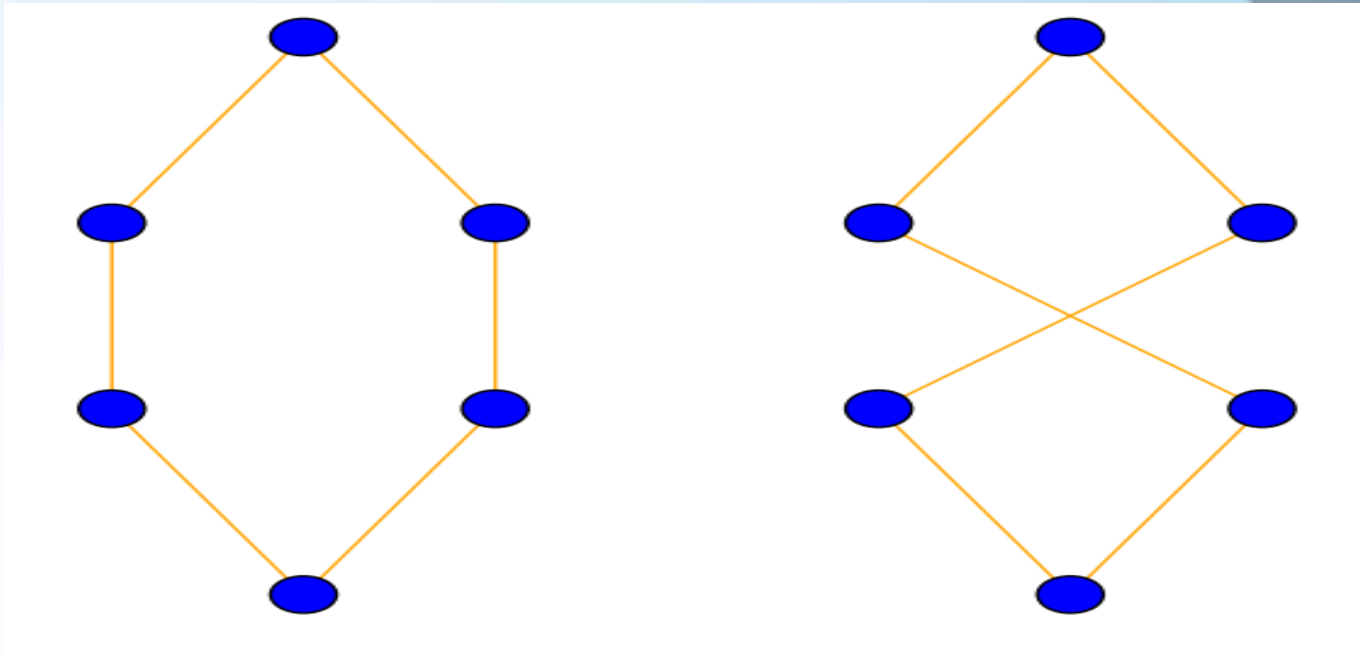
Porcentaje: 0.0474%





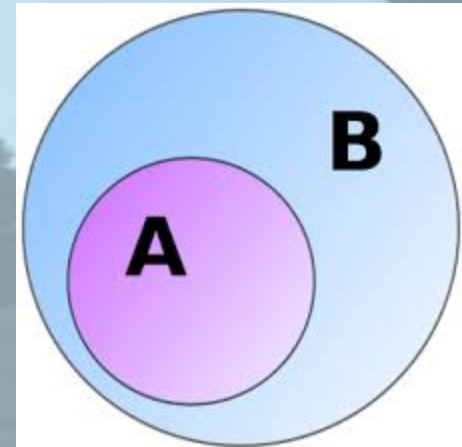
¿Cómo se resuelven?

- Por un lado, hay que encontrar una buena solución. Por ejemplo, podemos comenzar con una solución cualquiera e ir mejorándola.



¿Cómo se resuelven?

- Por otro lado, hay que mostrar que no hay otra solución mejor. Esto se puede hacer resolviendo problemas más fáciles que incluyan al que queremos resolver.
- A: Soluciones de nuestro problema
- B: Soluciones de un problema más simple

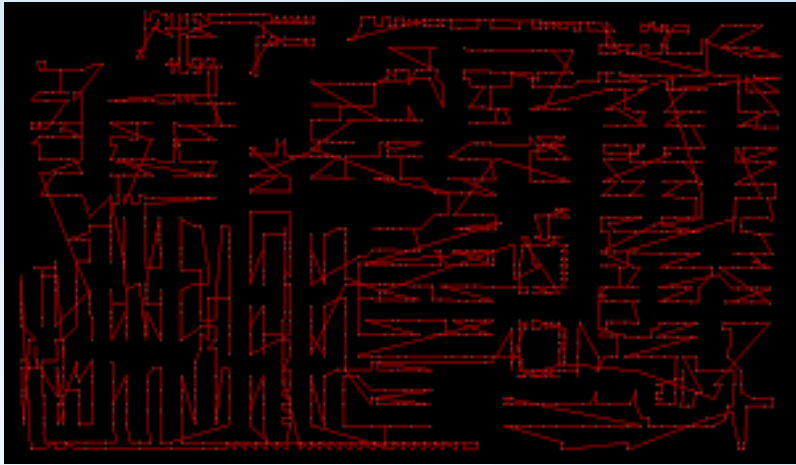


¿Para qué sirven?

Modelan algunos problemas de la realidad que tienen importantes aplicaciones prácticas.



Viajante de comercio



Rutas para vehículos



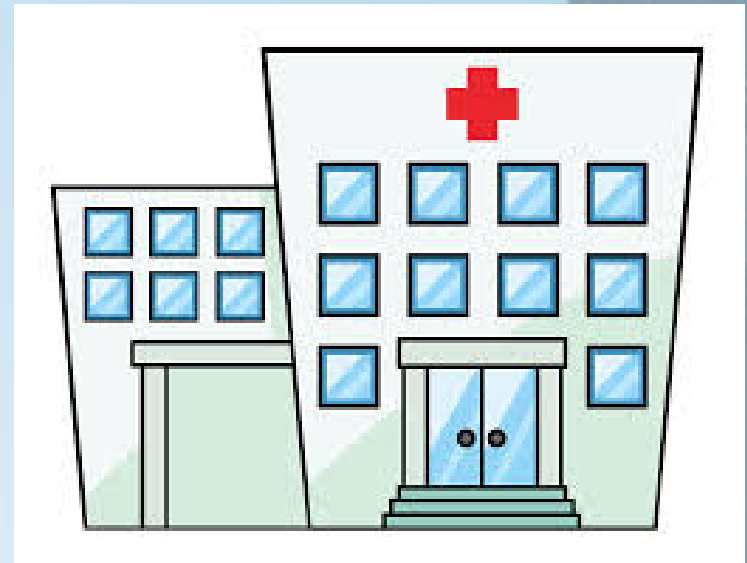
Distribución en contenedores



Asignaciones



Mucho más



Problemas Fáciles y Difíciles

- ✓ **Problema fácil:** Verificar que recorro todas las ciudades.
- ✓ **Problema difícil :** Verificar que es el camino mas corto.



Resolución Satisfactoria

¿Cuándo se considera que la computadora resuelve satisfactoriamente un problema?

Cuando el tiempo que tarda en encontrar la solución es “razonable”.



¿Qué pasa con el tiempo?

	10	20	30	40	50	60
n	0.00001"	0.00002"	0.00003"	0.00004"	0.00005"	0.00006"
n²	0.0001"	0.0004"	0.0009"	0.0016"	0.0025"	0.0036"
n³	0.001"	0.008"	0.027"	0.064"	0.125"	0.216"



¿Qué pasa con el tiempo?

	10	20	30	40	50	60
n	0.00001"	0.00002"	0.00003"	0.00004"	0.00005"	0.00006"
n²	0.0001"	0.0004"	0.0009"	0.0016"	0.0025"	0.0036"
n³	0.001"	0.008"	0.027"	0.064"	0.125"	0.216"
n⁵	0.1"	3.2"	24.3"	1.7m	5.2m	13.0m



¿Qué pasa con el tiempo?

	10	20	30	40	50	60
n	0.00001"	0.00002"	0.00003"	0.00004"	0.00005"	0.00006"
n²	0.0001"	0.0004"	0.0009"	0.0016"	0.0025"	0.0036"
n³	0.001"	0.008"	0.027"	0.064"	0.125"	0.216"
n⁵	0.1"	3.2"	24.3"	1.7m	5.2m	13.0m
2ⁿ	0.001"	1.0"	17.9m	12.7d	35.5 a	366 c



¿Qué pasa con el tiempo?

	10	20	30	40	50	60
n	0.00001"	0.00002"	0.00003"	0.00004"	0.00005"	0.00006"
n²	0.0001"	0.0004"	0.0009"	0.0016"	0.0025"	0.0036"
n³	0.001"	0.008"	0.027"	0.064"	0.125"	0.216"
n⁵	0.1"	3.2"	24.3"	1.7m	5.2m	13.0m
2ⁿ	0.001"	1.0"	17.9m	12.7d	35.5 a	366 c
3ⁿ	0.059"	58m	6.5 a	3855 c	2x10 ⁸ c	1.3x10 ¹³ c

Una PC más rápida?

	Pc actual	100 veces más rápida	1000 veces más rápida
n	N_1	$100 N_1$	$1000 N_1$



Una PC más rápida?

	Pc actual	100 veces más rápida	1000 veces más rápida
n	N_1	$100 N_1$	$1000 N_1$
n²	N_2	$10 N_2$	$31.6 N_2$



Una PC más rápida?

	Pc actual	100 veces más rápida	1000 veces más rápida
n	N_1	$100 N_1$	$1000 N_1$
n²	N_2	$10 N_2$	$31.6 N_2$
n³	N_3	$4.64 N_3$	$10 N_3$



Una PC más rápida?

	Pc actual	100 veces más rápida	1000 veces más rápida
n	N_1	$100 N_1$	$1000 N_1$
n²	N_2	$10 N_2$	$31.6 N_2$
n³	N_3	$4.64 N_3$	$10 N_3$
n⁵	N_4	$2.5 N_4$	$3.98 N_4$



Una PC más rápida?

	Pc actual	100 veces más rápida	1000 veces más rápida
n	N_1	$100 N_1$	$1000 N_1$
n²	N_2	$10 N_2$	$31.6 N_2$
n³	N_3	$4.64 N_3$	$10 N_3$
n⁵	N_4	$2.5 N_4$	$3.98 N_4$
2ⁿ	N_5	$N_5 + 6.64$	$N_5 + 9.97$



Una PC más rápida?

	Pc actual	100 veces más rápida	1000 veces más rápida
n	N_1	$100 N_1$	$1000 N_1$
n²	N_2	$10 N_2$	$31.6 N_2$
n³	N_3	$4.64 N_3$	$10 N_3$
n⁵	N_4	$2.5 N_4$	$3.98 N_4$
2ⁿ	N_5	$N_5 + 6.64$	$N_5 + 9.97$
3ⁿ	N_6	$N_6 + 4.19$	$N_6 + 6.29$



Hay problemas para los cuales las computadoras encuentran la solución en tiempo “razonable”.

Hay problemas para los cuales **TODAVÍA** las computadoras no han podido encontrar la solución en tiempo “razonable”.



¿POR QUÉ?

NO LO SABEMOS...

¿CARACTERÍSTICAS DEL PROBLEMA?

¿LIMITACIÓN HUMANA?

**SE BUSCA QUIEN
RESUELVA ESTE
DESAFÍO**

